Lois de probabilités
Sur une Casio de Type Graph 80

Loi Binomiale B(n ;p)

Une variable aléatoire X suit la **loi binomiale B(n ;p)** si l'expérience est **répétée n fois** de **manière aléatoire et indépendante**, il y a **2 issues possibles** : **succès** avec une probabilité de réalisation de p, **échec** avec une probabilité de non réalisation q = 1-p.

La loi binomiale permet de donner la probabilité P d'obtenir k fois le même résultat lorsque l'on répète n fois la même expérience.

$P(X=k)=C_n^k \times p^k \times (1-p)^{n-k}$	Propriétés : $E(X)=n\times p$ $V(X)=n\times p\times(1-p)$ $\sigma(X)=\sqrt{n\times p\times(1-p)}$

Exemple 1 :
Une cible est posée sur un mur , elle a trois secteurs :

- *Le centre*
- *L'extérieur*
- *Le mur*

La probabilité d'atteindre :

- ✓ *Le centre est de 0.1*
- ✓ *L'extérieur est de 0.3*
- ✓ *Le mur est de 0.6*

a) *En 10 lancers quelle est la probabilité d'atteindre 3 fois le centre ?*
b) *En 10 lancers quelle est la probabilité d'atteindre 5 fois le mur ?*
c) *En 10 lancers quelle est la probabilité d'atteindre au moins une fois l'extérieur ?*

Réponses :

a) Soit X la VA représentant le nombre de fois ou l'on atteint le centre. Cette VA suit la loi binomiale B(10 ;0.1) en effet l'expérience est répété 10 fois de manière aléatoire et indépendante. Il y a 2 issues : atteindre le centre avec une probabilité de 0.1 , ne pas atteindre le centre avec une probabilité de 0.9.

$$P(X=3)=C_{10}^3 \times 0.1^3 \times (1-0.1)^7 \approx 0.057$$

En 10 lancers la probabilité d'atteindre 3 fois le centre est de 0.057

b) Soit X la VA représentant le nombre de fois ou l'on atteint le mur. Cette VA suit la loi binomiale B(10 ;0.6) en effet l'expérience est répété 10 fois de manière aléatoire et indépendante. Il y a 2 issues : atteindre le mur avec une probabilité de 0.6 , ne pas atteindre le mur avec une probabilité de 0.4.

$$P(X=5)=C_{10}^{5}\times 0.6^{5}\times(1-0.6)^{5}\approx 0.2$$

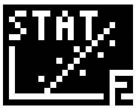
En 10 lancers la probabilité d'atteindre 5 fois le mur est de 0.2

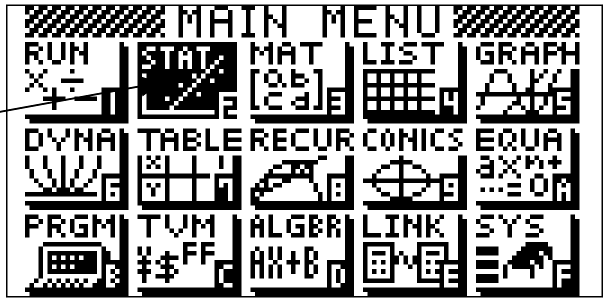
c) Soit X la VA représentant le nombre de fois ou l'on atteint l'extérieur. Cette VA suit la loi binomiale B(10 ;0.3) en effet l'expérience est répété 10 fois de manière aléatoire et indépendante. Il y a 2 issues : atteindre l'extérieur avec une probabilité de 0.3 , ne pas atteindre l'extérieur avec une probabilité de 0.7.

$$P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-C_{10}^{0}\times 0.3^{0}\times(1-0.3)^{10}\approx 0.971$$

En 10 lancers la probabilité d'atteindre au moins une fois l'extérieure est de 0.971

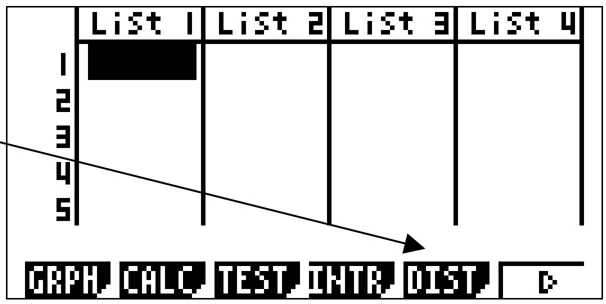
Enter dans le menu Stat





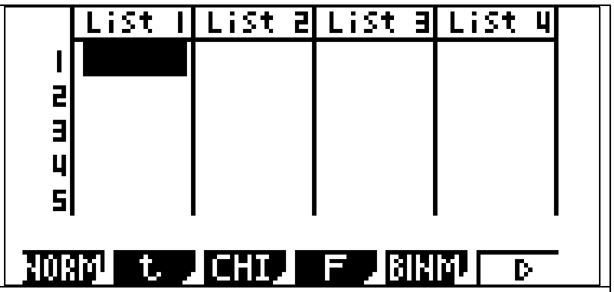
Entrer dans le sous-menu 

des lois de probabilités

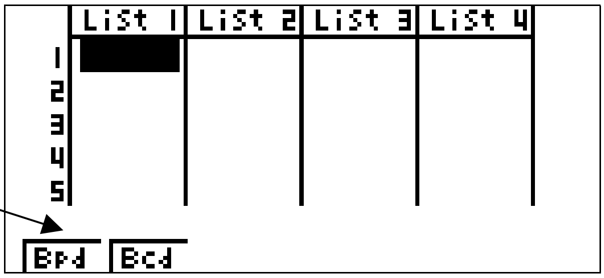


Entrer dans le menu 

de la loi Binomiale



2 sous menus sont possibles Bpd Bcd

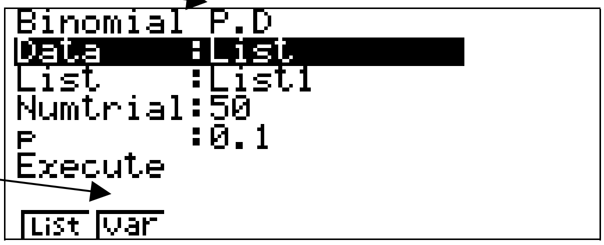


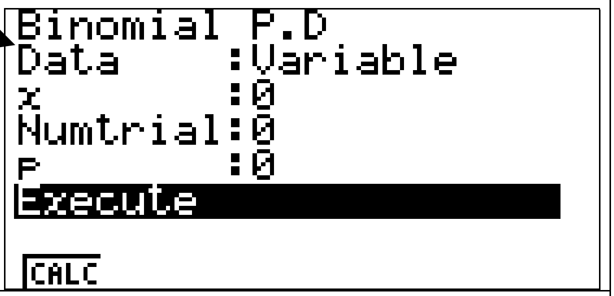
Sous menu Bpd

permet de calculer P(X= x_i)

Cliquer sur Var lorsque Data est surligné en vu d'obtenir

Data :Variable





Application

Supposons que X suive la loi Binomiale B(50 ; 0.1)

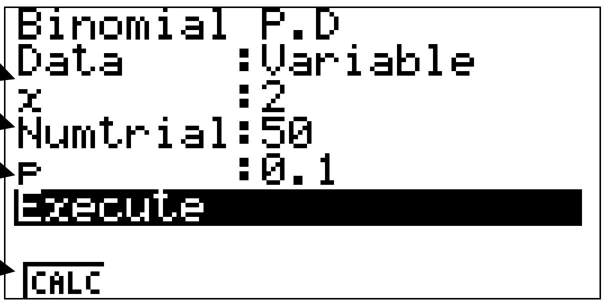
Calculer P(X=2)

Valeur de la variable souhaitée

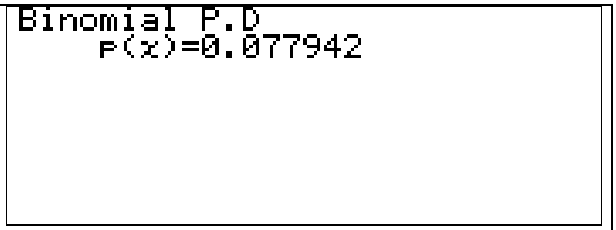
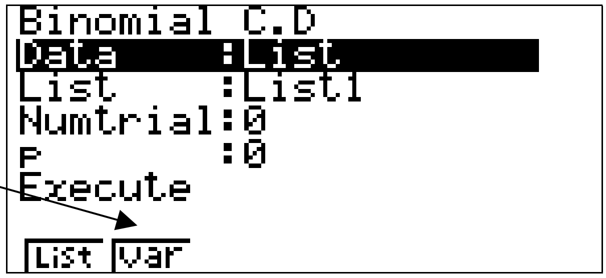
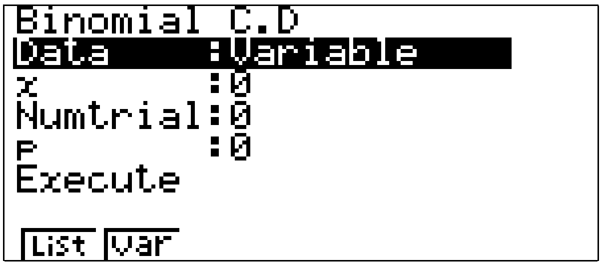
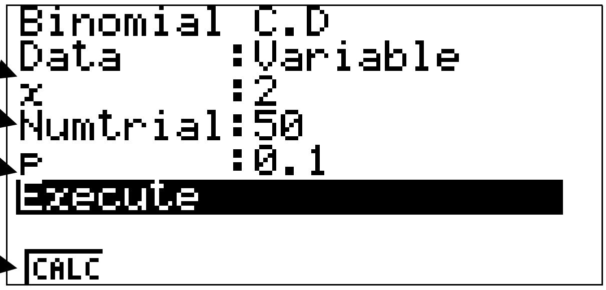
Nombre de répétitions

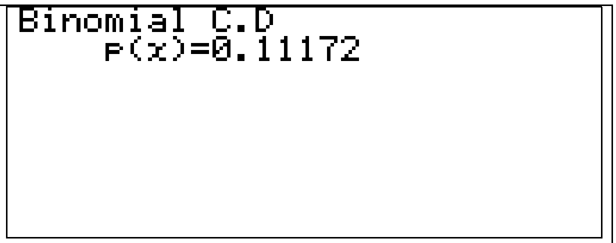
Probabilité

Cliquer sur CALC

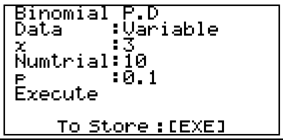
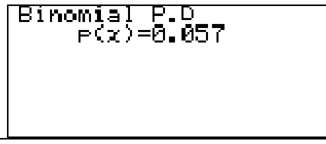
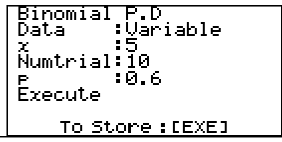
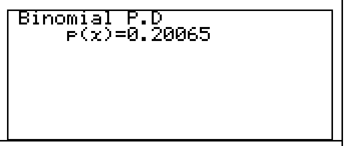
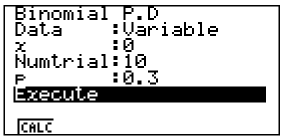
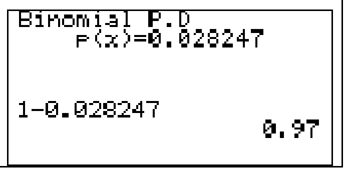


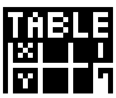
P(X=2)= 0.077942

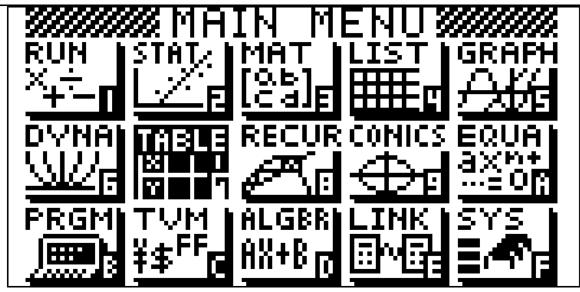
	
Sous menu Bcd permet de calculer P(X$\le x_i$) Cliquer sur Var lorsque Data est surligné en vu d'obtenir Data :Variable	 
Application *Supposons que X suive la loi Binomiale B(50 ; 0.1)* *Calculer P(X$\le$ 2)* Valeur de maximale de la variable souhaitée Nombre de répétitions Probabilité Cliquer sur CALC	
P(X$\le$ 2)=0.11172	

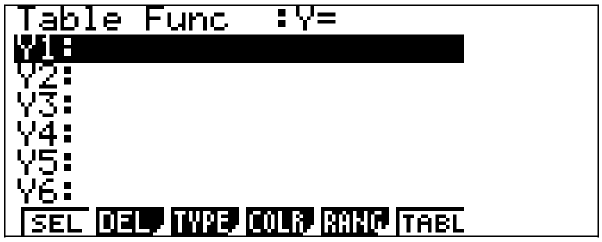
Retour à l'exemple 1 : *Une cible est posée sur un mur , elle a trois secteurs :* ❑ *Le centre* ❑ *L'extérieur* ❑ *Le mur* *La probabilité d'atteindre :* ✓ *Le centre est de 0.1* ✓ *L'extérieur est de 0.3* ✓ *Le mur est de 0.6* *a) En 10 lancers quelle est la probabilité d'atteindre 3 fois le centre ?* *b) En 10 lancers quelle est la probabilité d'atteindre 5 fois le mur ?* *c) En 10 lancers quelle est la probabilité d'atteindre au moins une fois l'extérieur ?*

Réponses : a) $P(X=3)=C_{10}^{3}\times 0.1^{3}\times(1-0.1)^{7}\approx 0.057$		
b) $P(X=5)=C_{10}^{5}\times 0.6^{5}\times(1-0.6)^{5}\approx 0.2$		
c) $P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-C_{10}^{0}\times 0.3^{0}\times(1-0.3)^{10}\approx 0.971$		

Il est aussi possible d'utiliser l'éditeur de fonction et le menu TABLE de la calculatrice	
Entrer dans le menu Table 	



Si des fonctions sont présentes les effacer à l'aide de la touche DEL



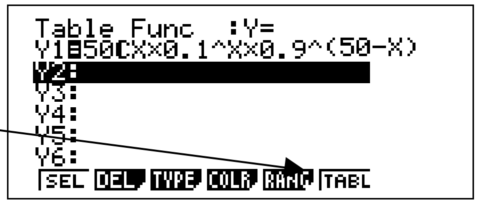
Application

Supposons que X suive la loi Binomiale B(50 ; 0.1)
Calculer P(X≤ 6)

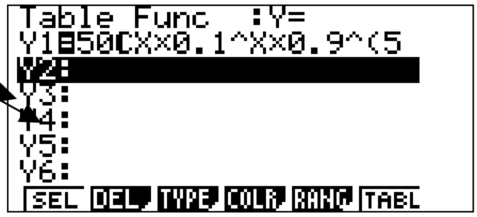
Entrer dans Y1 la fonction suivante
Y1■50CX×0.1^X×0.9^(50−X)

Pour obtenir C *cliquer sur la touche « OPTN » de la machine puis entrer dans le menu Proba de la machine* PROB *puis sur la touche* nCr.

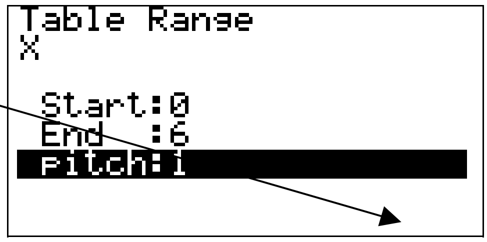
Il faut alors entrer la liste des valeurs entières souhaitées.
Entrer dans le menu RANG.



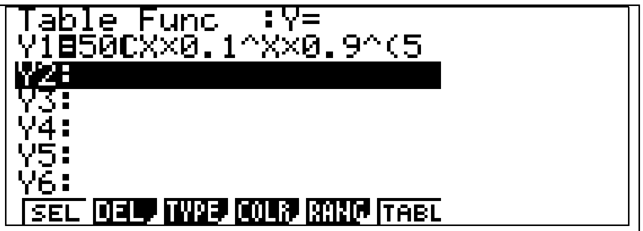
Entrer le minimum puis le maximum des valeurs entières souhaitées.
Laisser Pitch : 1
Puis cliquer sur « EXE »

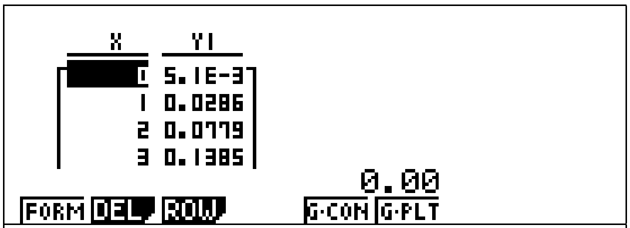


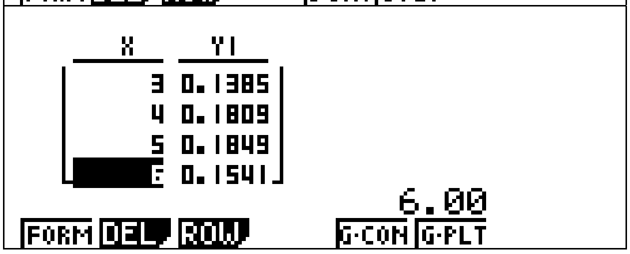
Afficher le tableau de valeurs en cliquant sur TABL



Voici la liste des résultats
Par exemple P(x=2)=0.0779







Loi de Poisson P(m) ou P(λ)

La loi de Poisson peut être considéré comme une extension de la loi binomiale, si les 3 conditions suivantes sont vérifiées :

$$n \geq 30$$
$$p \leq 0.1$$
$$n \times p < 15$$

$$P(X = k) = \frac{m^k \times e^{-m}}{k!}$$

rappel : $m = n \times p$

Propriétés :

$E(X) = m = n \times p$

$V(X) = m = n \times p$

$\sigma(X) = \sqrt{m} = \sqrt{n \times p}$

Exemple 2 :

La probabilité pour qu'il y ai une faute d'impression dans une page est de 0.01.Dans un ouvrage de 500 pages , quelle est la probabilité pour qu'il y ai 10 fautes ?
pour qu'il y ai plus de 2 fautes ?

Réponses :

X la VA représentant le nombre de fautes par page suit la loi de Poisson P(5), en effet l'expérience est répétée 500 fois de manière aléatoire et indépendante. Il y a 2 issues possibles succès il y a une faute dans une page avec une probabilité de 0.01, échec il n'y a *pas de faute avec une probabilité de 0.99 de plus les 3 conditions pour passer à une loi de Poisson sont vérifiées :*

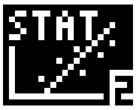
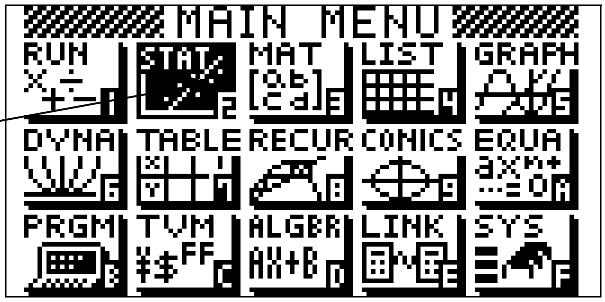
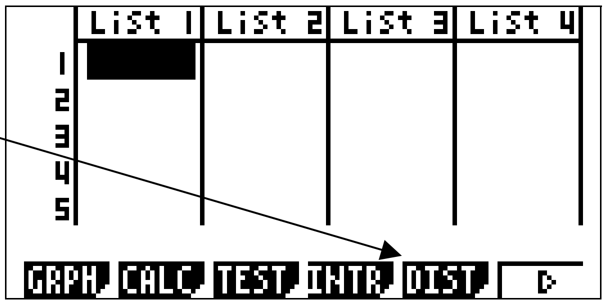
$n \geq 30$		$500 \geq 30$
$p \leq 0.1$	*en effet*	$0.01 \leq 0.1$
$n \times p < 15$		$5 < 15$

- $P(X = 10) = \dfrac{5^{10} \times e^{-5}}{10!} = 0.018$

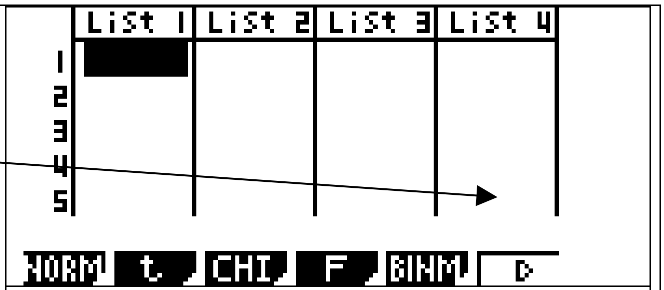
La probabilité d'avoir 10 fautes dans l'ouvrage de 500 pages est de 0.018

- $P(X > 2) = 1 - [P(x = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)]$

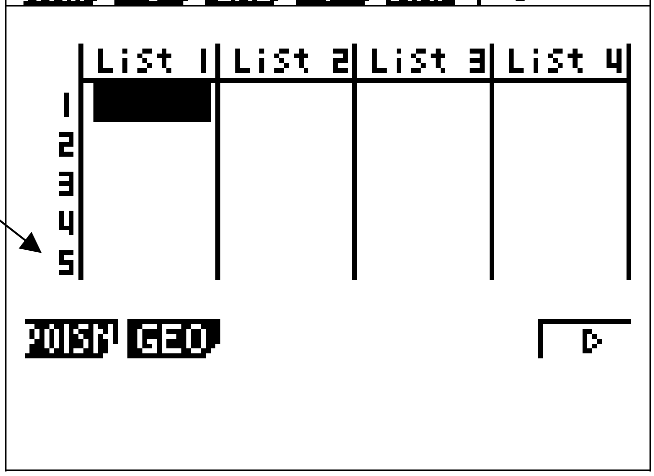
après calcul nous trouvons P(X>2)=0.8754

<table>
<tr><td>Enter dans le menu Stat
</td><td></td></tr>
<tr><td>Entrer dans le sous-menu  des lois de probabilités</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

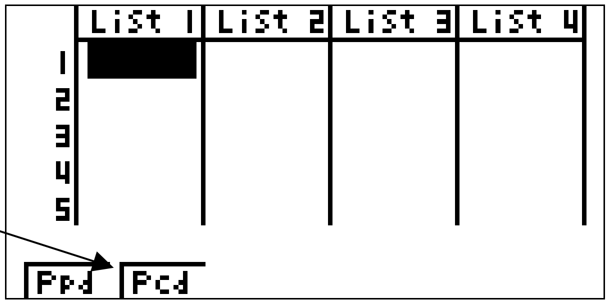
Puis cliquer une fois sur ▷



Puis entrer dans le menu POISN de la loi de Poisson.

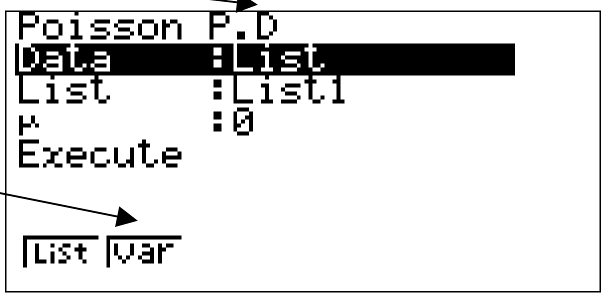


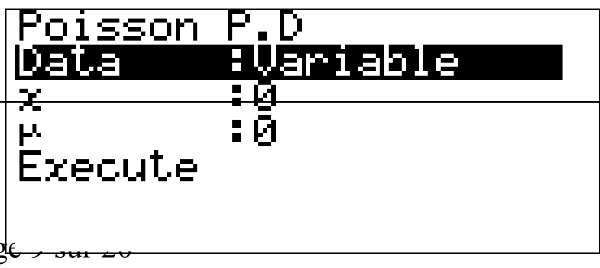
2 sous menus sont possibles Ppd Pcd

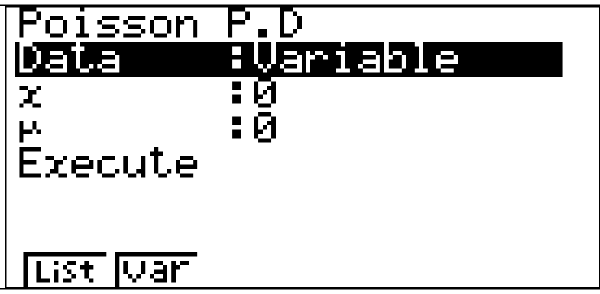
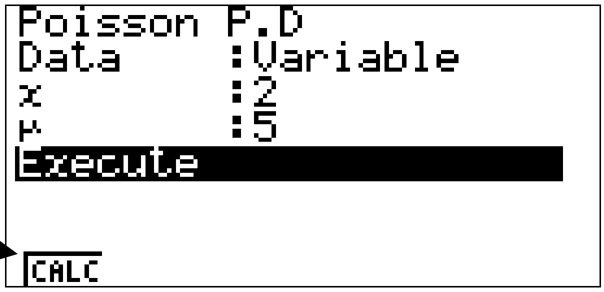
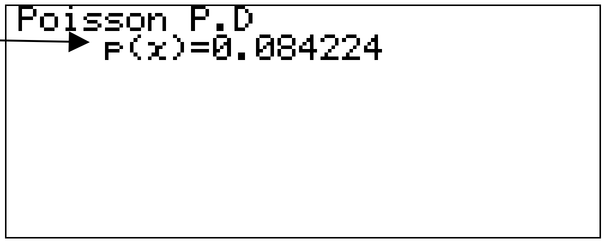
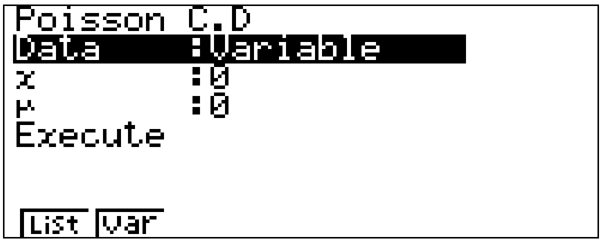


Sous menu Ppd
permet de calculer P(X= x_i)

Cliquer sur Var lorsque Data est surligné
en vu d'obtenir
Data :Variable





	
Application *Supposons que X suive* *la loi de Poisson P(5)* *Calculer P(X=2)* Valeur de la variable souhaitée Valeur de λ Cliquer sur CALC	
P(X=2)= 0.084224	
Sous menu Pcd permet de calculer P(X$\leq x_i$) Cliquer sur Var lorsque Data est surligné en vu d'obtenir Data :Variable	 

Application

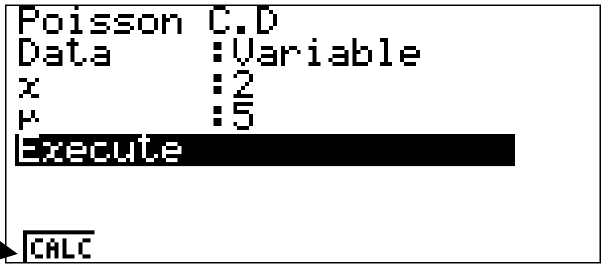
Supposons que X suive
la loi de Poisson P(5)

Calculer $P(X \leq 2)$

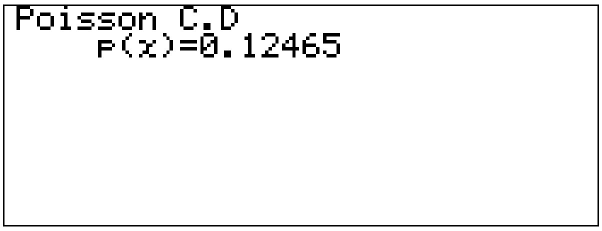
Valeur de la variable souhaitée

Valeur de λ

Cliquer sur CALC



$P(X \leq 2)=0.12465$



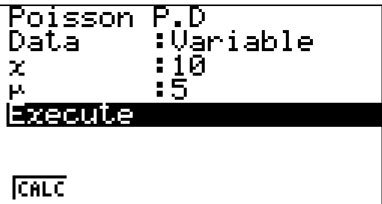
Retour à l'exemple 2 :

La probabilité pour qu'il y ai une faute d'impression dans une page est de 0.01.Dans un ouvrage de 500 pages , quelle est la probabilité pour qu'il y ai 10 fautes ?
pour qu'il y ai plus de 2 fautes ?

Réponse 1

$$P(X=10)=\frac{5^{10}\times e^{-5}}{10!}=0.018$$

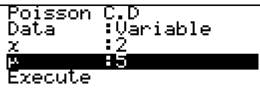
La probabilité d'avoir 10 fautes dans l'ouvrage de 500 pages est de 0.018

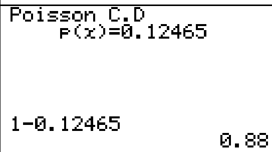


Réponse 2

$$P(X>2)=1-[P(x=0)+P(X=1)+P(X=2)]$$

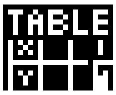
la probabilité pour qu'il y ai plus de 2 fautes est 0.88

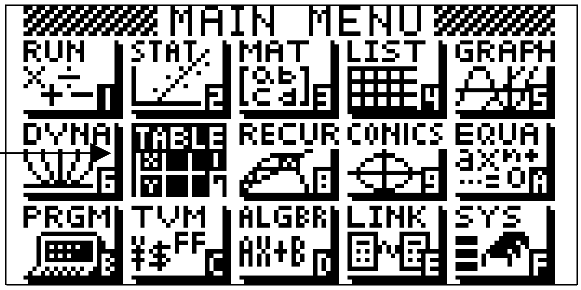




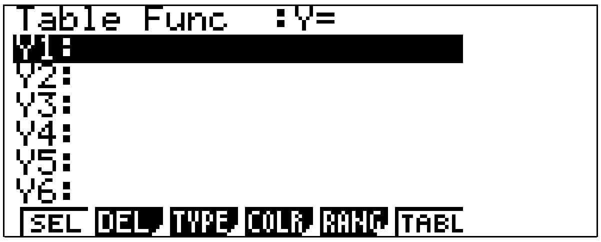
Il est aussi possible d'utiliser l'éditeur de fonction et le menu TABLE de la calculatrice

Entrer dans le menu Table





Si des fonctions sont présentes les effacer à l'aide de la touche DEL

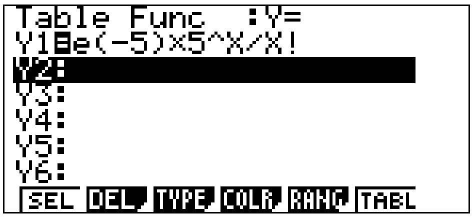


Application

Supposons que X suive la loi Poisson
P(5)
Calculer P(X≤ 6)

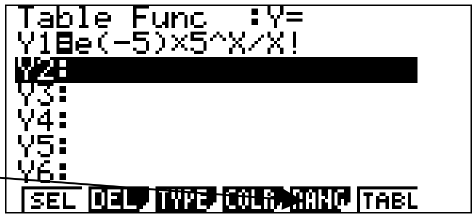
Entrer dans Y1 la fonction suivante

Y1■e(−5)×5^X/X!

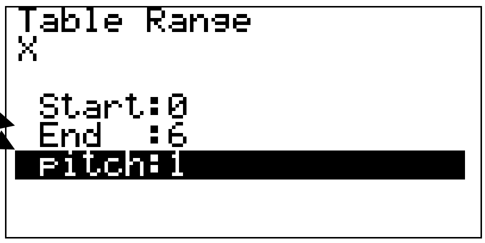


Pour obtenir e cliquer sur la touche « OPTN » de la machine puis entrer dans le menu Proba de la machine PROB *puis sur la touche.* x!

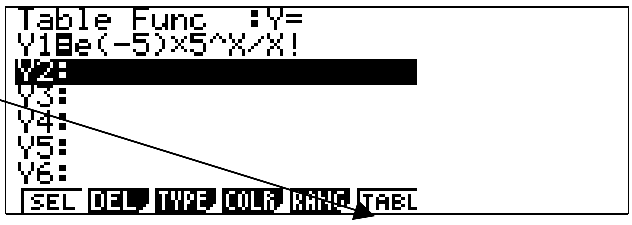
Il faut alors entrer la liste des valeurs entières souhaitées.
Entrer dans le menu RANG *.*



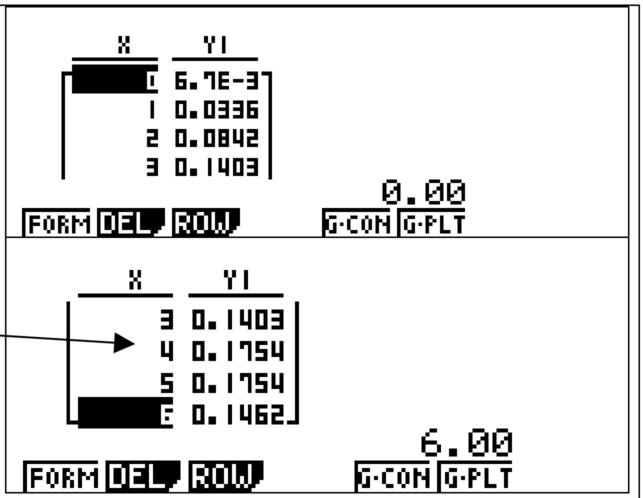
Entrer le minimum puis le maximum des valeurs entières souhaitées.
Laisser Pitch : 1
Puis cliquer sur « EXE »



Afficher le tableau de valeurs
en cliquant sur TABL



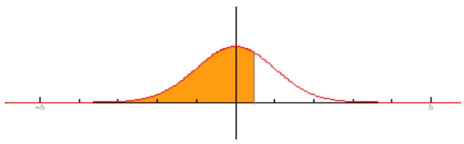
Voici la liste des résultats
Par exemple P(x=3)=0.1403



La loi Normale $N(m;\sigma)$

La loi Normale est l'un des exemples les plus important de la loi de probabilité continue car de nombreux phénomènes ont des caractères qui se distribuent suivant la loi Normale.
La loi Normale se note son espérance mathématique est E(X)=m
son écart type est $\sigma(X) = \sigma$

$P[a \leq X \leq b] = \int_a^b f(x)dx$ est l'aire de la courbe représentative de la fonction f comprise entre les valeurs a et b.

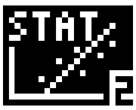
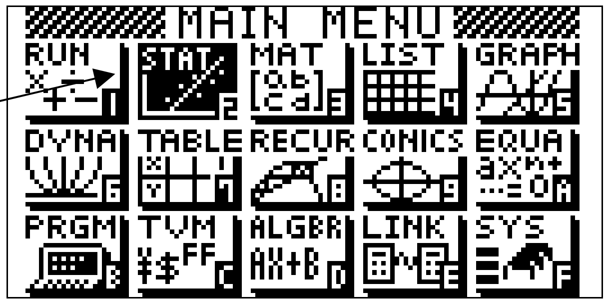


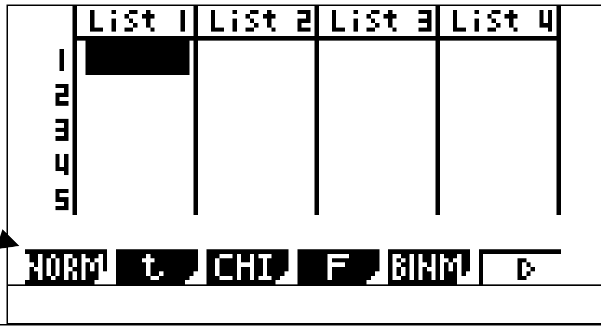
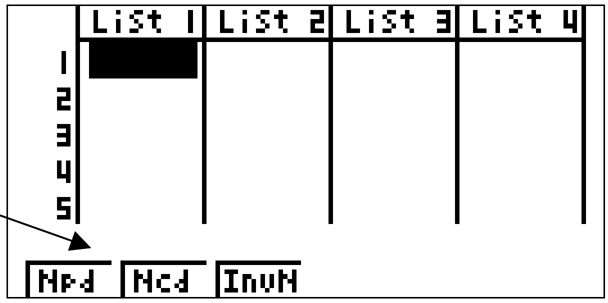
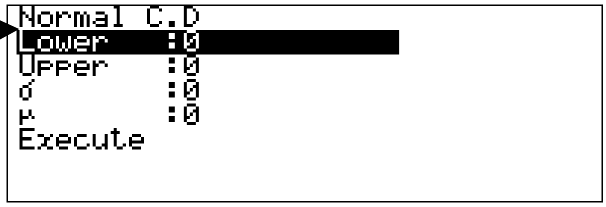
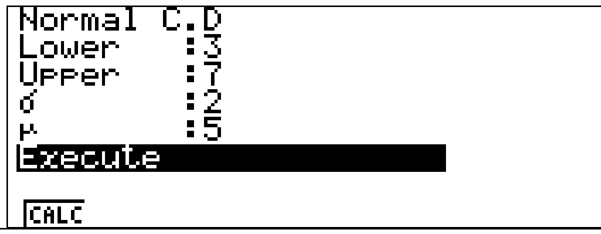
Exemple 3 :
Lors d'un examen passé par 100 étudiants, les notes sont réparties normalement. La moyenne est de 12 et l'écart type est de 2.Calculer la probabilité pour qu'un étudiant obtienne une note comprise entre 7 et 12.

Réponse :
X VA représentant la note de l'étudiant suit la loi Normale N(12 ;2)
Calculons $P[7 \leq X \leq 12]$.
Nous devons avant tout nous ramener à la loi Normale centré réduite N(0 ;1)
En posant $T = \frac{X - M}{\sigma}$ *soit* $T = \frac{X - 12}{2}$

$P[7 \leq X \leq 12] = P[\frac{7-12}{2} \leq X \leq \frac{12-12}{2}] = P[-2.5 \leq T \leq 0]$ *=0.5-0.0062=0.49379*

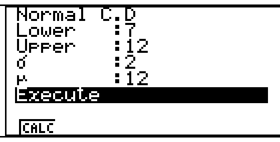
la probabilité pour qu'un étudiant obtienne une note comprise entre 7 et 12 est de 0.4937

Enter dans le menu Stat 	
Entrer dans le sous-menu DIST des lois de probabilités	

	
Entrer dans le menu NORM de la loi normale	
3 sous menus sont possibles Npd Ncd InvN	
Sous menu Ncd permet de calculer P($X_1 \leq X \leq X_2$) X1 X2 σ m Application X suit la loi normale N(5 ;2) Calculer P($3 \leq X \leq 7$) Cliquer sur CALC	 
P($3 \leq X \leq 7$)=0.68268	

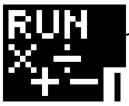
	Normal C.D prob=0.68268
Sous menu INVN permet de calculer a tel que P($X_1 \leq a$)=aire Aire (Area) σ m	Inverse Normal Area :0 σ :0 μ :0 Execute
Application X suit la loi normale N(5 ;2) Calculer a tel que P($X \leq a$)=0.05 Cliquer sur CALC	Inverse Normal Area :0.05 σ :2 μ :5 Execute CALC
a = 1.7102 pour que que P($X \leq a$)=0.05	Inverse Normal x=1.7102

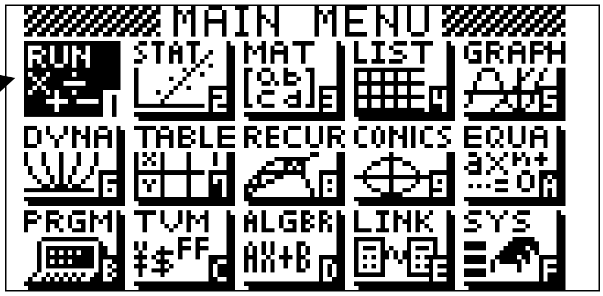
Retour à l'exemple 3 : *Lors d'un examen passé par 100 étudiants, les notes sont réparties normalement. La moyenne est de 12 et l'écart type est de 2.Calculer la probabilité pour qu'un étudiant obtienne une note comprise entre 7 et 12.*		
Réponse : $P[7 \leq X \leq 12] = P[\frac{7-12}{2} \leq X \leq \frac{12-12}{2}] = P[-2.5 \leq T \leq 0]$ *=0.5-0.0062=0.49379*		



Il est aussi possible d'utiliser le sous menu PROBA de menu RUN
pour calculer des probabilités dans le cas d'une loi normale centrée réduite $N(0;1)$

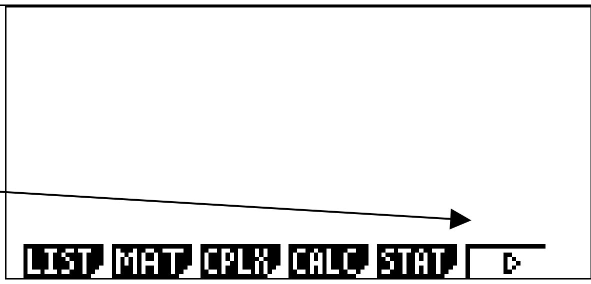
Enter dans le menu Run



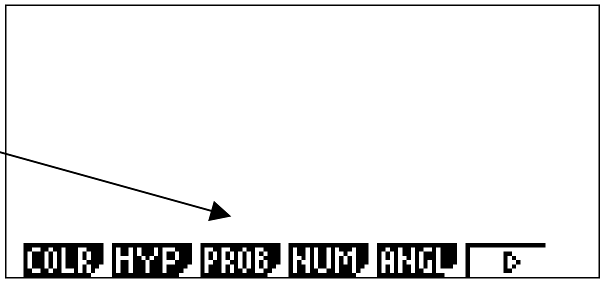


Cliquer sur la touche « OPTN » de la machine

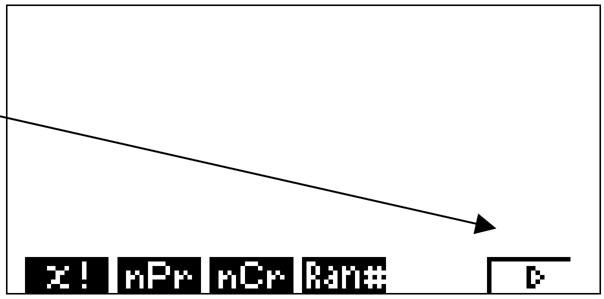
Puis 1 fois sur la touche ▷



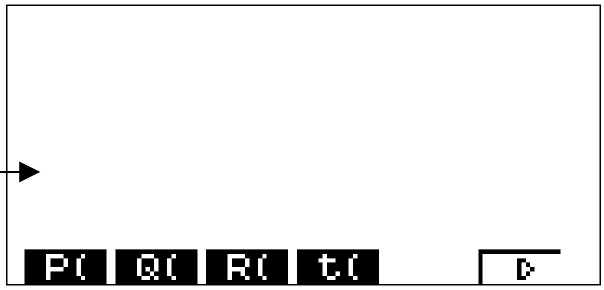
Entrer dans le sous menu 



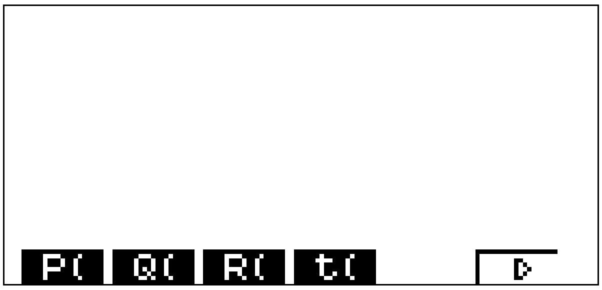
Cliquer à nouveau sur ▷



Nous sommes arrivé dans le Menu loi Normale de notre Casio



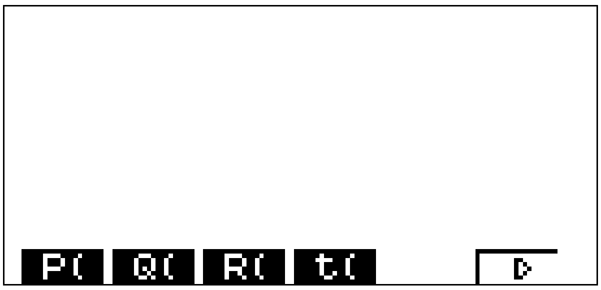
4 sous menus sont possibles
P(Q(R(t(



Le sous menu P(

Permet de calculer dans le cas ou la variable aléatoire suit une loi N(0 ;1) la probabilité

P($X \leq X_1$) ainsi que P($X_1 \leq X \leq X_2$)

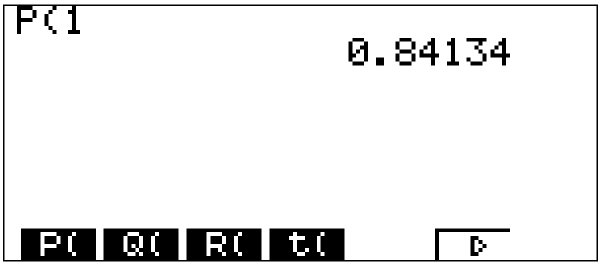


Application

- Calculons P($X \leq 1$)

Il suffit juste de taper
P(1

P($X \leq 1$)=0.84134

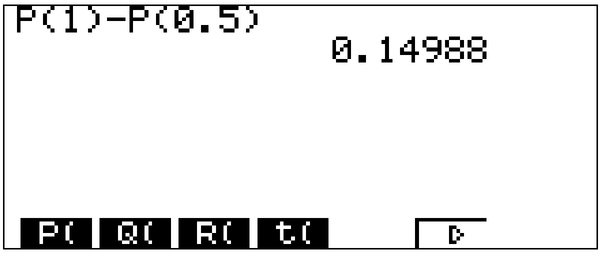


- Calculons P($0.5 \leq X \leq 1$)

Il suffit juste de taper
P(1)-P(0.5)

Attention il ne faut pas oublier de **fermer les parenthèses** sous peine d'avoir un résultat faux.

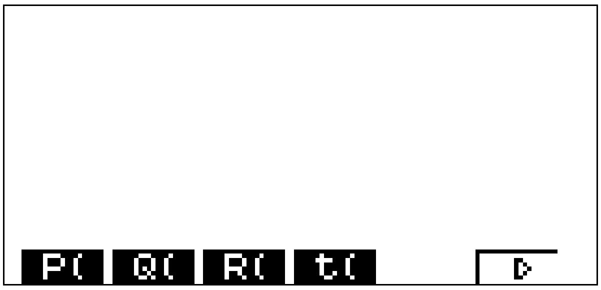
P($0.5 \leq X \leq 1$)=0.14988



Le sous menu Q(

Permet de calculer dans le cas ou la variable aléatoire suit une loi N(0 ;1) la probabilité

P($0 \leq X \leq X_1$) ainsi que P($X_1 \leq X \leq 0$)



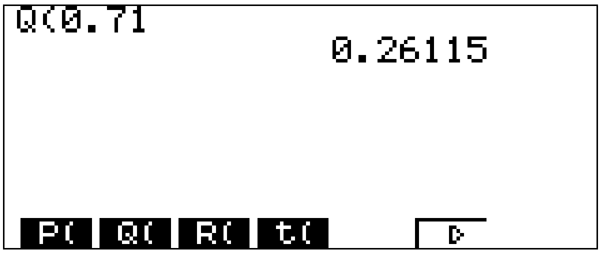
Application

- Calculons P($0 \le X \le 0.71$)

Il suffit juste de taper

Q(0.71

P($0 \le X \le 0.71$)=

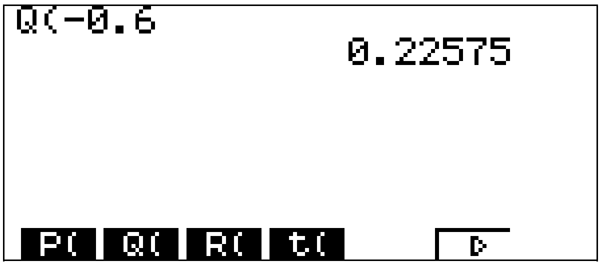


- Calculons P($-0.6 \le X \le 0$)

Il suffit juste de taper

Q(-0.6

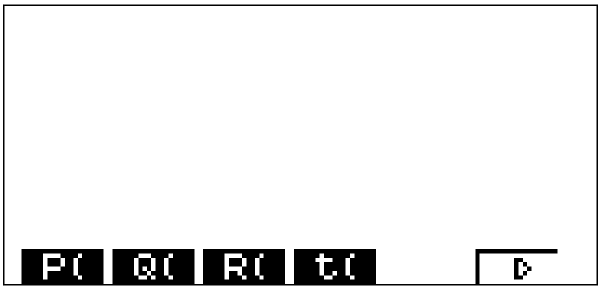
P($-0.6 \le X \le 0$)=0.22575



Le sous menu **R(**

Permet de calculer dans le cas ou la variable aléatoire suit une loi N(0 ;1) la probabilité

P($X \ge X_1$)



Application

- Calculons P($X \ge 1.41$)

Il suffit juste de taper

R(1.1

P($X \ge 1.41$)= 0.13567