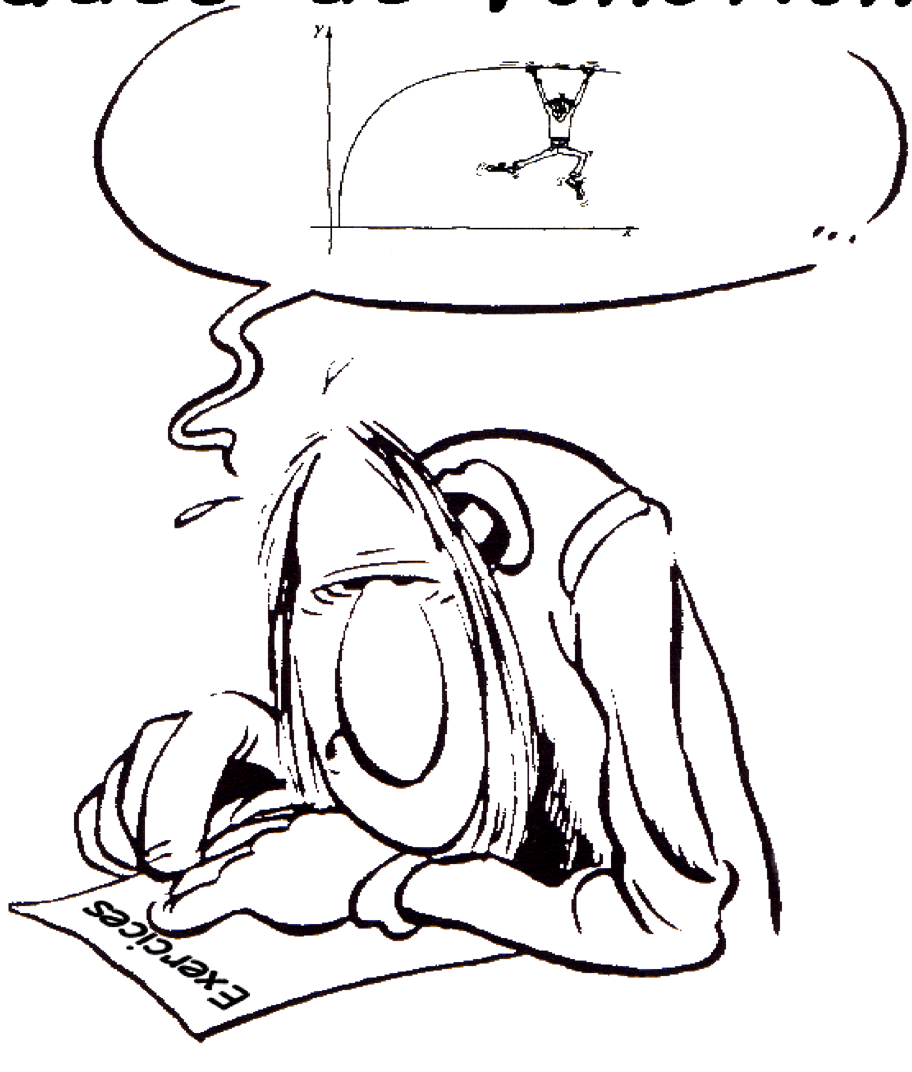
Etudes de fonctions



Exercice 1

La fonction f est définie sur $]-\infty, 2[$ par :

$$f(x) = \frac{3x - 1}{x - 2}.$$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un plan rapporté à un repère orthogonal.

1) a) Déterminer $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

b) En déduire l'existence d'une asymptote.

2) a) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

b) En déduire l'existence d'une asymptote $\mathscr{D}$.

c) Préciser la position relative de $\mathscr{C}$ et de $\mathscr{D}$.

3) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f.

4) Construire la courbe $\mathscr{C}$ et ses asymptotes.

Exercice 2

La fonction f est définie sur $]-1, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{-2x - 5}{x + 1}.$$

$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de f dans un plan rapporté à un repère orthogonal.

1) a) Déterminer $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$.

b) En déduire l'existence d'une asymptote.

2) a) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b) En déduire l'existence d'une asymptote $\mathscr{D}$.

c) Préciser la position relative de $\mathscr{C}$ et de $\mathscr{D}$.

3) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f.

4) Construire la courbe $\mathscr{C}$ et ses asymptotes.

Exercice 3

La fonction f est définie sur $]-\infty, -3[$ par :

$$f(x) = \frac{3x+8}{2x+6}.$$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un plan rapporté à un repère orthogonal.

1) a) Déterminer $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$.

b) En déduire l'existence d'une asymptote.

2) a) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

b) En déduire l'existence d'une asymptote $\mathscr{D}$.

c) Préciser les positions relatives de $\mathscr{C}$ et de $\mathscr{D}$.

3) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f.

4) Construire la courbe $\mathscr{C}$ et ses asymptotes.

Exercice 4

La fonction f est définie sur $]-1, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2+7x+2}{2(x+1)}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un plan rapporté à un repère orthogonal.

1) a) Déterminer $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$.

b) En déduire l'existence d'une asymptote.

2) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

3) a) Montrer que, pour tout x de $]-1, +\infty[$, f peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = \frac{x+6}{2} - \frac{2}{x+1}.$$

b) Montrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = \dfrac{x+6}{2}$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

c) Préciser la position relative de $\mathscr{C}$ et de $\mathscr{D}$.

4) a) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.

b) Dresser le tableau de variation de f.

5) Construire la courbe $\mathscr{C}$ et ses asymptotes.

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 + 10x}{x^2 + 1}.$$

$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de f dans un plan rapporté à un repère orthogonal.

1) Étudier la parité de f et montrer que l'on peut étudier f sur $[0, +\infty[$.

2) a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b) Montrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

c) Préciser les positions relatives de $\mathscr{C}$ et de $\mathscr{D}$.

3) a) Calculer $f'(x)$ et vérifier que :

$$f'(x) = \frac{(x^2 - 2)(x^2 - 5)}{(x^2 + 1)^2}.$$

b) En déduire les variations de f sur $[0, +\infty[$ et dresser le tableau de variation.

4) Donner une équation de la tangente au point O.

5) Construire la courbe $\mathscr{C}$.

Exercice 6

Soit f une fonction définie et dérivable sur $]1, +\infty[$.
On donne son tableau de variation :

x	1		3		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
f	|| $+\infty$	$\searrow$	2,5	$\nearrow$	$+\infty$

On admet que, pour tout élément x de $[0, +\infty[$, f peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = ax + \frac{b}{x-c}$$

où a, b et c sont trois réels que l'on va déterminer.
On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un plan muni d'un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

1) a) Justifier à l'aide du tableau de l'existence d'une droite $\mathscr{D}$ asymptote à $\mathscr{C}$.

b) En déduire la valeur de c.

On prend pour les questions suivantes : $c = 1$.

2) Le tableau fournit les coordonnées d'un point particulier de $\mathscr{C}$. En déduire une relation entre a et b.

3) a) Calculer $f'(x)$.

b) En utilisant le tableau de variation, trouver une deuxième relation entre a et b.

c) Déterminer les réels a et b.

On admet maintenant que :

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x-1}.$$

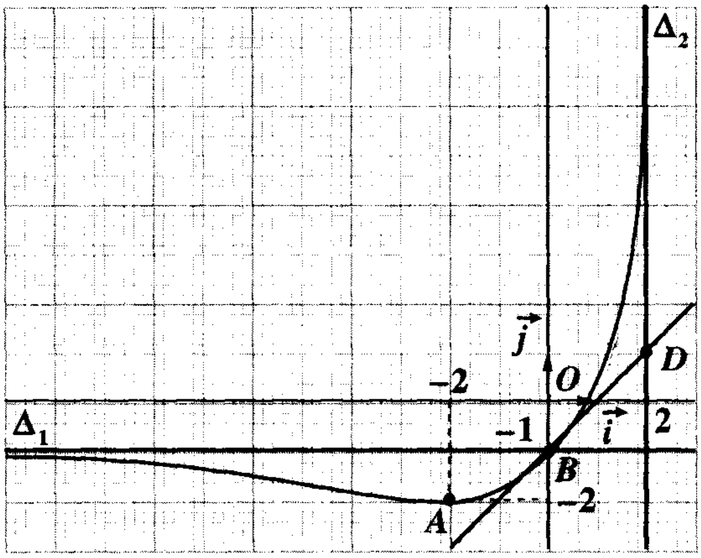
4) a) Montrer que la droite $\mathscr{D}'$, d'équation $y = \frac{x}{2}$, est asymptote à $\mathscr{C}$.

b) Préciser les positions relatives de $\mathscr{D}'$ et de $\mathscr{C}$.

5) Construire la courbe $\mathscr{C}$.

6) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) > 3$.

Exercice 7



La courbe $\mathscr{C}$ est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $]-\infty, 2[$.

1) **La courbe $\mathscr{C}$ admet pour asymptotes les droites Δ_1 et Δ_2 d'équations respectives $y = -1$ et $x = 2$.**

   En déduire : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

2) **On admet que la tangente à la courbe au point $A(-2, -2)$ est parallèle à l'axe des abscisses.**

   Dresser le tableau de variation.

3) **On considère les points B et D de coordonnées respectives $(0, -1)$ et $(2, 1)$.**

   a) **Donner une équation de la droite (BD).**

   b) **On admet que la droite (BD) est tangente à la courbe au point B.**

   Déterminer $f'(0)$.

4) **L'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique x_0 dans l'intervalle $]-\infty, 2[$. À l'aide du graphique, donner un encadrement par deux entiers consécutifs de x_0.**

5) **On prend désormais $x_0 = 0{,}75$.**

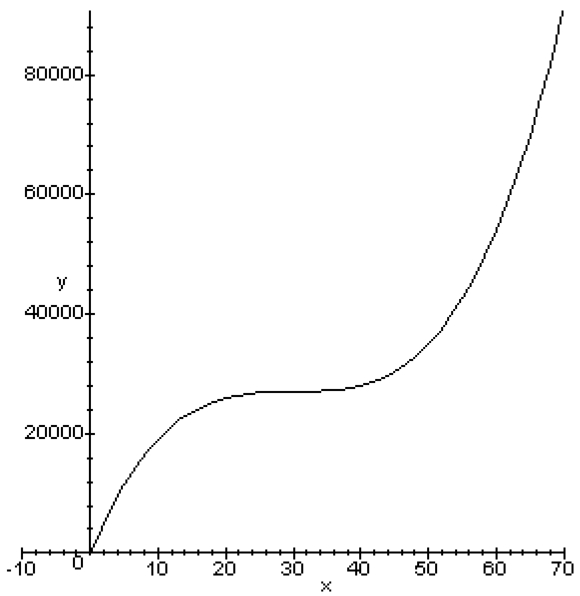
   Résoudre graphiquement dans $]-\infty, 2[$ l'inéquation $f(x) \leqslant 0$.

Exercice 8

A. Soit f la fonction définie sur [0 ; 70] par :
$f(x) = x^3 - 90x^2 + 2700x$.
l/ a/ Calculer et factoriser f'(x).
b/ En déduire le sens de variation de f sur [0,70].
2/ Compléter le tableau suivant :

x	10	20	30	40	50	60	70
f(x)							

B. Une entreprise fabrique un certain type de matériels. Chaque jour, elle produit un nombre x de matériels, x étant compris entre 0 et 70. Le coût, exprimé en euro, de la production journalière de x matériels, est donné par $f(x) = x^3 - 90x^2 + 2700x$. On suppose que toute la production est vendue au prix de 900 € l'unité. La recette journalière totale, exprimée en euro, est alors donnée par $g(x) = 900x$. Le bénéfice journalier total b(x) est égal à g(x) - f (x). On appelle $\mathcal{C}$ et Δ les courbes représentatives de f de g.
1/ Déterminer graphiquement les solutions de l'équation b(x) = 0. Vérifier le résultat par le calcul.
2/ Déterminer graphiquement le signe de b(x). À quel intervalle doit appartenir x pour que l'entreprise dégage un bénéfice ?



Exercice 9

– Un plus un égal deux –

Entendu à la radio le 2 janvier : « Au cours de l'année écoulée, les salaires des fonctionnaires ont augmenté de 1 % au 1^{er} janvier et de 1 % au 1^{er} juillet. Les fonctionnaires ont donc vu leurs salaires mensuels augmenter de 2 % dans l'année. »

1/ Vrai ou faux ?

a/ Appelons R_1 le salaire mensuel de départ, et R_2 le salaire mensuel après les deux augmentations.

Montrer que $R_2 = (1 + x)^2 R_1$ où x est un réel dont on précisera la valeur.

b/ De quel pourcentage le salaire a-t-il réellement augmenté ? Ce résultat correspond-il aux déclarations du journaliste ?

2/ Vraiment faux ?

a/ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1+x)^2$. On note C_f sa courbe représentative dans un repère (0 ; I, J).

Calculer la dérivée f' de f.

Déterminer une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse 0.

b/ Quelle est l'approximation affine de f(x) au voisinage de 0 ?

En déduire une approximation de f(0,01).

c/ Le journaliste était-il si loin de la vérité ?

Sa méthode d'approximation serait-elle encore acceptable pour deux augmentations de 10 % ? et de 50 % ?