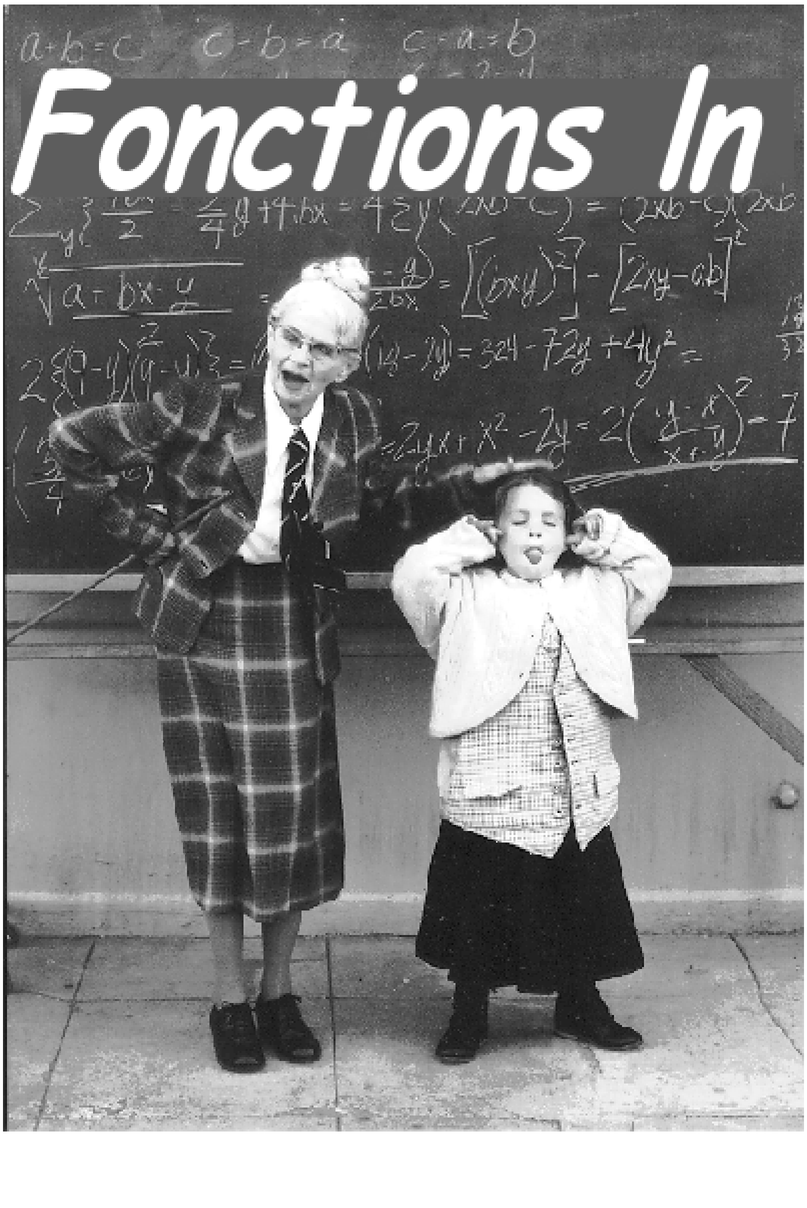

Fonctions ln

Limites de fonctions ln

Dans les exercices suivants calculer les limites proposées

Exercice 1

$$\lim_{x\to+\infty}(2\ln x-1)$$

Exercice 2

$$\lim_{x\to+\infty}(\ln x+x)$$

Exercice 3

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\ln x)$$

Exercice 4

$$\lim_{x\to+\infty}(\frac{4\ln x+3}{\ln x-2})$$

Exercice 5

$$\lim_{x\to0^+}(\ln x+5x^2-6)$$

Exercice 6

$$\lim_{x\to0^+}(x\ln x-4x+2)$$

Exercice 7

$$\lim_{x\to0^+}(\frac{\ln x-7}{2\ln x+3})$$

Exercice 8

$$\lim_{x\to0^+}((\ln x)^2-9)$$

Exercice 9

$$\lim_{x\to1^+}\ln(x-1)$$

Exercice 9

$$\lim_{x\to2^-}(\frac{\ln(2-x)}{x+4)})$$

Etudes de fonctions ln –Tracés de courbes

Dans les exercices suivants , étudier la fonction proposée et tracer la courbe représentative sur l'intervalle I donné. Pour cela :

- Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition
- Calculer la dérivée et étudier son signe
- Faire le tableau de variation
- Remplir un tableau de valeurs
- Tracer la courbe

Exercice1

$f(x) = 2\ln x - 3$ I=]0;+∞[

Exercice 2

$f(x) = \ln x - x + 2$ I=]0;+∞[

Exercice 3

$f(x) = x\ln x$ I=]0;+∞[

Exercice 4

$f(x) = \ln(\frac{x-1}{x+4})$ I=]1;+∞[

Exercice 5

$f(x) = \frac{\ln x - 3}{x}$ I=]0;+∞[

Exercice 6

$f(x) = x^2 \ln x$ I=]0;+∞[

Exercice 7

$f(x) = 2 + \frac{1}{x} + \ln x$ I=]0;+∞[

Exercice 8

$f(x) = \ln(4 - x)$ I=]-∞; 4[

Exercice 9

Soit *f* la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{1+\ln x}{x}$$

On appelle **C** la courbe représentative de *f* dans un repère orthonormal $(o;\vec{i};\vec{j})$

1) a) Étudier la limite de *f* en $+\infty$.

On pourra écrire $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}$

b) Étudier la limite de *f* en 0.

2) a) Calculer *f '(x)* et étudier son signe sur $]0;+\infty[$

b) Dresser le tableau de variation de f.

3) On appelle A le point de **C** d'ordonnée y = 0.
a) Déterminer l'abscisse de A.

b) Déterminer une équation de la tangente **T** à la courbe **C** au point A.

4) Tracer **T** et **G**.

Exercice 10

On considère la fonction f définie par :

$$f(x)=\ln(\frac{1-x}{1+x})$$

1) Vérifier que la fonction *f* est définie sur l'intervalle 1=] -1,1 [.

2) Déterminer $\lim_{x\to 1^-} f(x)$

3) a) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.
b) Dresser le tableau de variation de *f*.

5) On appelle **C** la courbe dans un repère orthogonal $(o;\vec{i};\vec{j})$ (unité graphique sur l'axe des abscisses : 5 cm).

a) Vérifier que **C** passe par le point O et déterminer une équation de la tangente **T** à **C** au point O.

b) Construire **C** et **T** .

Exercice 11

Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$f(x) = 1 - x - \ln x$

1) Calculer les limites de f(x) lorsque
   a) x tend vers 0 ;
   b) x tend vers $+\infty$.

2) Calculer la fonction dérivée de f et construire le tableau de variation de la fonction f.

3) a) Calculer f(1).
   b) Montrer que la fonction f est positive sur] 0,1] et négative sur $]1;+\infty[$

4) Construire la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (unité : 2 cm).

Exercice 12

Partie A

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par:

$g(x) = 2\ln x - x^2 - 2$.

1. Calculer g'(x) puis faire le tableau de variation de la fonction g (aucun calcul de limite n'est demandé).
2. En déduire que g(x) est toujours négatif sur $]0;+\infty[$.

Partie B

On considère maintenant la fonction f de la variable réelle x définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{-2\ln x}{x} - x + 2$$

1.
   a) calculer la dérivée f ' de la fonction f et montrer que pour tout réel x de $]0;+\infty[$

   $$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

   b) Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

c) Dresser le tableau de variation de f. Donner la valeur exacte, puis une valeur approchée à 0,1 près de $f(\frac{1}{2}); f(1); f(2)$ et $f(e)$

2. Soit **C** la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(o;\vec{i};\vec{j})$ (unité graphique : 2 cm).

a) Démontrer que **C** admet pour asymptote la droite **D** d'équation : y = -x + 2.
Préciser les positions relatives de **C** et **D**.
Quelle est l'autre asymptote de **C** ?
b) Tracer la courbe **C** et ses deux asymptotes.
c) Montrer que la courbe **C** coupe l'axe des abscisses en un point A d'abscisse x_0 telle que.
$1.4 < x_0 < 1.5$

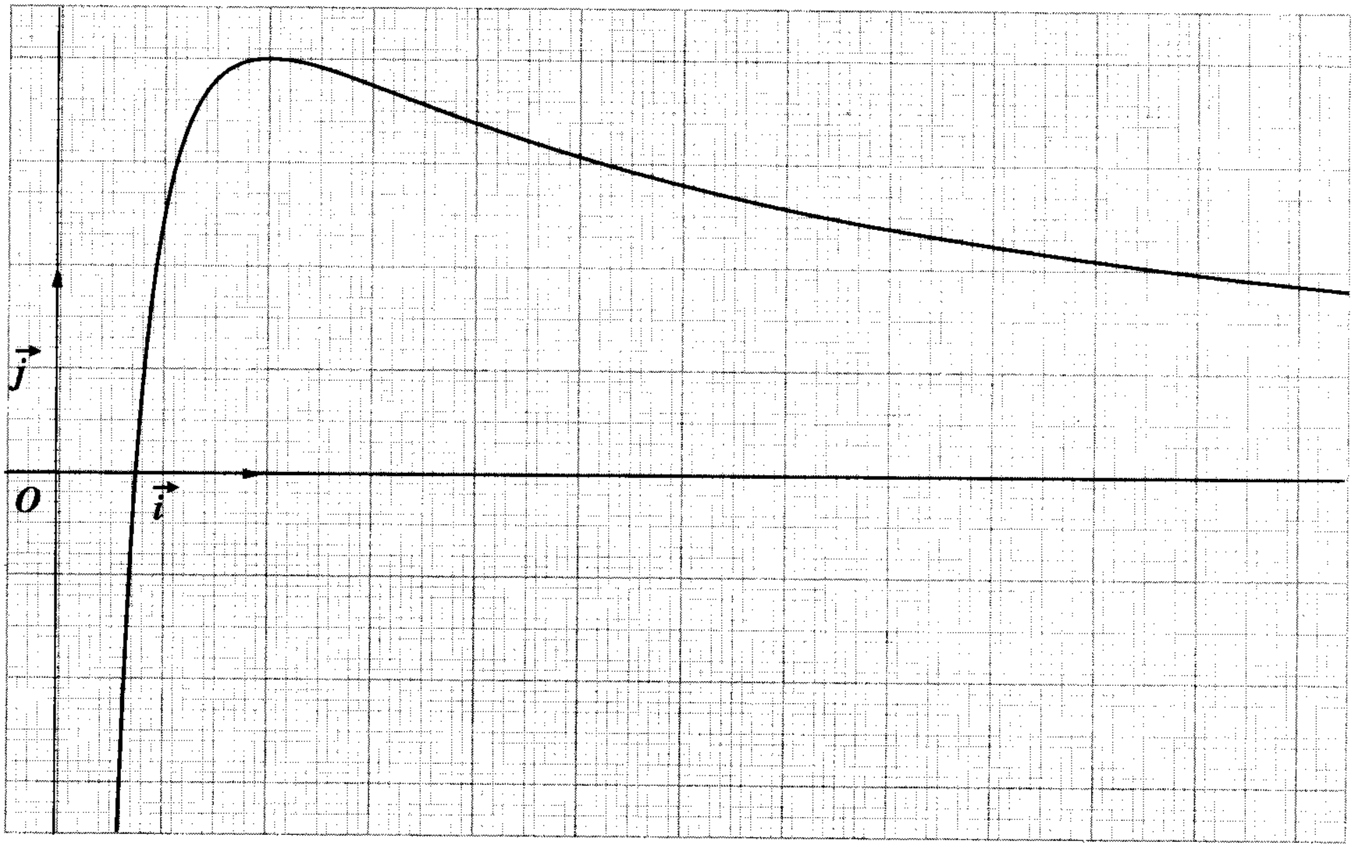
3. Soit h la fonction de la variable x définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :
$h(x) = (\ln x)^2$
a) Calculer h'(x).
En déduire une primitive F de f sur l'intervalle $]0;+\infty[$

Exercice 13

Partie A

Étude d'une fonction

Soit la fonction f définie sur l'intervalle I =] 0, $+\infty$ [par :
$f(x) = 2(\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x})$
Sa courbe représentative est donnée ci-dessous. Le plan est rapporté à un repère orthonormal (O ; i , j). Unité graphique: 2 cm. Elle est fournie pour permettre de contrôler l'exactitude de certains résultats. On ne doit pas l'utiliser pour répondre aux questions.



1. Déterminer la limite de *f (x)* quand x tend vers + ∞ .
Qu'en déduisez vous pour la courbe **C** ?

2. Déterminer la limite de *f (x)* quand x tend vers 0 (on pourra écrire *f (x)* sous forme d'un seul quotient).
Qu'en déduisez vous pour la courbe **C** ?

3.
   a) Rappeler le signe de lnx pour x élément de I.

   b) Calculer *f '(x)* et montrer que, pour tout x de I, $f'(x) = -2\dfrac{\ln x}{x^2}$

   c) En déduire le tableau de variation complet de la fonction *f.* (On fera figurer les limites).

4.
   a) Résoudre dans I l'équation d'inconnue x : f *(x) = 0.*

   b) Déduire des questions précédentes le signe de *f (x)* pour x élément de I.

Partie B
Application de la partie A

Une entreprise constate que la production et la vente de x milliers d'objets dégagent un bénéfice de 2 (1 + lnx) milliers de francs. Ceci est admis pour un nombre d'objets supérieur ou égal à 300.

1.Calculer le bénéfice unitaire moyen, en francs, c'est-à-dire $\frac{2(1+\ln x)}{x}$ lorsque l'entreprise x produit

a) 2 000 objets. L'entreprise fait-elle un bénéfice ?
b) 300 objets. L'entreprise fait-elle un bénéfice ?

2. Déduire de la **partie A** à partir de quelle production l'entreprise commence à faire un bénéfice.

Donner la réponse à un objet près par excès.

3. Quelle est la production qui assure à l'entreprise le bénéfice unitaire moyen maximum ? Quel est le bénéfice total correspondant à cette production ?