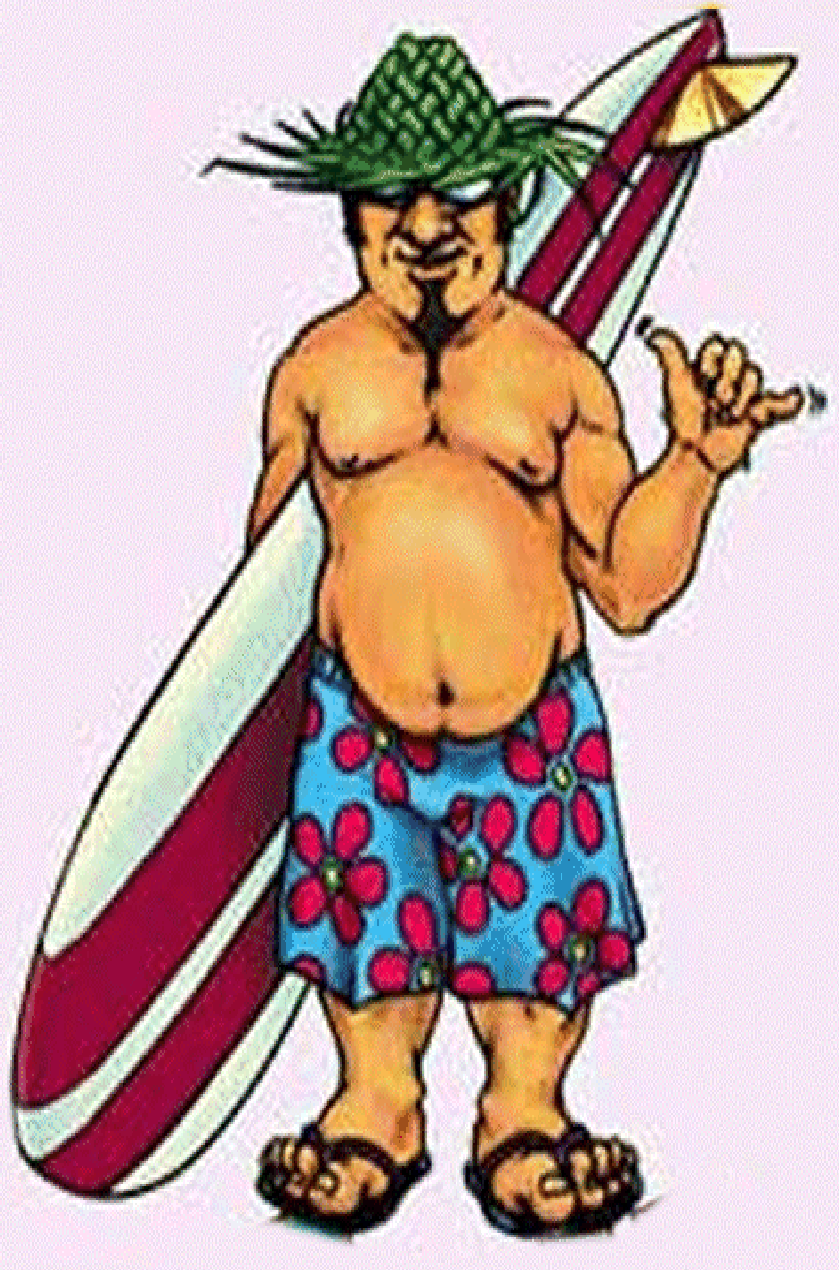


Programmation Linéaire

Exercices de programmation linéaire
Rencontrés le jour du … Bac

Exercice 1

Un fleuriste décide de fabriquer deux types de bouquets. Les bouquets A sont composés de 6 roses, de 3 gerberas et de 2 branches de gypsophile ; les bouquets B sont composés de 4 roses, de 6 gerberas et de 3 branches de gypsophile.
Il rapporte chaque jour des halles 5 cartons de 30 roses chacun, 6 cartons de 18 gerberas et 3 gerbes de 20 branches de gypsophile chacune. Il réalise un bénéfice de 18 F par bouquet A vendu et de 30 F par bouquet B vendu.
On appelle x le nombre de bouquets A et y le nombre de bouquets B vendus par jour.
Le but de l'exercice est de déterminer le nombre de bouquets A et le nombre de bouquets B qu'il doit fabriquer par jour pour réaliser un bénéfice maximal, en supposant qu'il vend chaque jour toute sa production.

1) Montrer que les contraintes de cette situation peuvent se traduire par le système d'inéquations suivant:

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ 3x + 2y \leqslant 75 \\ x + 2y \leqslant 36 \\ 2x + 3y \leqslant 60. \end{cases}$$

2) Le plan P est rapporté au repère orthonormal $(o; \vec{i}; \vec{j})$. Déterminer graphiquement l'ensemble des points M(x, y) traduisant les inégalités précédentes (on hachurera la partie du plan qui ne convient pas).

2) a) Exprimer en fonction de x et de y le bénéfice b réalisé par la vente de x bouquets A et de y bouquets B.
b) Exprimer y en fonction de x et de *b.*

c) La relation obtenue au b) est une équation de droite dont les points de coordonnées entières (x, y) déterminent le bénéfice *b.* Tracer dans le plan utilisé précédemment la droite correspondant à un bénéfice de 300 f

3) a) Expliquer comment le graphique permet de trouver le point $I(x_0; y_0)$ pour lequel le bénéfice est maximal.
b) Calculer les coordonnées du point 1.
c) En déduire le bénéfice maximal que peut réaliser le fleuriste.

Exercice 2

Un club sportif organise un tournoi.
Pendant ce tournoi, il vendra des tasses de café au lait et des tasses de chocolat au lait.
Une collecte a permis de réunir 20 litres de lait, 2 kilogrammes de sucre et assez de café et de chocolat pour faire 100 tasses de chaque boisson.
On prévoit de servir 2 sucres par tasse en moyenne; chaque paquet d'un kilogramme de sucre contient 120 morceaux; il faut 1/4 de litre de lait pour une tasse de chocolat et 1/12 de litre de lait pour une tasse de café.
On note x et y les nombres respectifs de tasses de chocolat et de tasses de café au lait qui seront servies pendant le tournoi.
1)Traduire ces contraintes sous la forme d'un système d'inégalités portant sur x et y.
2) À tout couple (x, y) on associe le point M de coordonnées (x, y) dans un repère orthonormal (unité : 1 cm représente 10 tasses).
Déterminer graphiquement l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées (x, y) vérifient le système

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 100 \\ 0 \leqslant y \leqslant 100 \\ x + y \leqslant 120 \\ 3x + y \leqslant 240. \end{cases}$$

(On hachurera la partie du plan qui ne convient pas.)

3)Le trésorier du club propose de vendre 5 F chaque tasse de chocolat au lait et 4 F chaque tasse de café au lait.
a) Exprimer en fonction de x et de y la recette que fera le club.
b) Les couples (x, y) permettant d'obtenir une recette donnée *R* sont les coordonnées des points d'une droite notée D_R dont on donnera une équation.
Représenter graphiquement la droite D_R correspondant au cas particulier *R* = 200 F
c) Déterminer à l'aide du graphique un point par lequel doit passer la droite 2, pour que la recette soit maximale.
En déduire le nombre de tasses de chaque sorte correspondant à servir. Calculer cette recette maximale *Rm.*

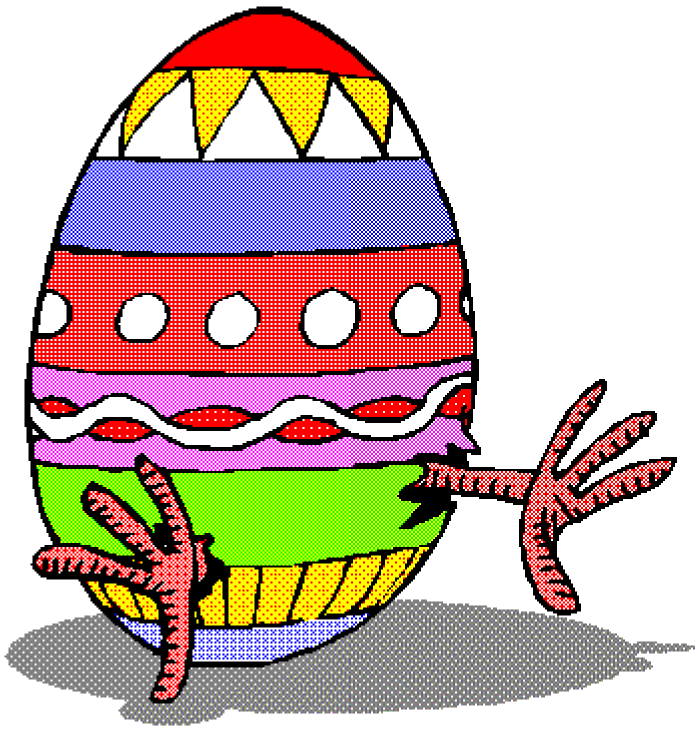
Sujet Bac 95

Exercice 3

Un confiseur propose pour Pâques deux sortes de paquets :
• les paquets A contiennent 8 oeufs en chocolat, 8 bonbons et une surprise;
• les paquets B contiennent 4 oeufs en chocolat, 12 bonbons et une surprise.
Le confiseur a acheté pour confectionner ses paquets de Pâques : 320 oeufs en chocolat, 540 bonbons et 50 surprises.
On appelle x le nombre de paquets A et y le nombre de paquets B confectionnés.
1)Traduire les contraintes de fabrication par un système d'inéquations.
2)Dans un plan muni d'un repère orthogonal $(o;\vec{i};\vec{j})$, déterminer graphiquement l'ensemble des points M (x, y) dont les coordonnées sont solutions du système

$$\begin{cases} 2x + y \leqslant 80 \\ 2x + 3y \leqslant 135 \\ x + y \leqslant 50 \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0. \end{cases}$$

3)
a) Sachant que le confiseur réalise un bénéfice de 16 F par paquet A et de 14 F par paquet B, déterminer en fonction de x et de y le bénéfice *b* occasionné par la vente de tous les paquets A et B.
b) Exprimer y en fonction de x et de *b*.
c) Tracer la droite D correspondant à un bénéfice *b* = 560 F.
d) Déterminer graphiquement le nombre de paquets de chaque type qu'il doit vendre pour réaliser un bénéfice maximal. Quel est alors ce bénéfice ?



Exercice 4

Un pépiniériste propose à un grand magasin des sapins sous deux conditionnement différents
• les uns avec une motte de terre, pesant 10 kg, au prix de 50 F l'un;
• les autres sans motte, pesant 5 kg, au prix de 40 F l'un.
Le pépiniériste n'accepte que les commandes d'au moins 300 sapins de chaque type.
Le transporteur dispose d'un camion dont la charge ne peut dépasser 10 500 kg. II n'assure la livraison que si elle est d'au moins 1 000 arbres.
Le magasin dispose de 66 OOOF pour approvisionner son rayon sapins.
On appelle x le nombre de sapins avec motte et y le nombre de sapins sans motte que le grand magasin commande.

1) Traduire ces contraintes sous la forme d'un système d'inégalités portant sur x et y.
2) À tout couple (x, y) de nombres réels, on associe le point M de coordonnées (x, y) dans un repère orthonormal $(o; \vec{i}; \vec{j})$ *(unité* : 1 cm pour 100 sapins).

Déterminer graphiquement l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées (x, y) vérifient le système

$$\begin{cases} x \geqslant 300 \\ y \geqslant 300 \\ x + y \geqslant 1\,000 \\ 2x + y \leqslant 2\,100 \\ 5x + 4y \leqslant 6\,600. \end{cases}$$

(On hachurera la partie du plan qui ne convient pas.)

3) On suppose que tous les sapins commandés par le magasin seront vendus par celui- ci
• au prix de 90 F pièce pour ceux avec motte;
• au prix de 50 F pièce pour les autres.
a) Exprimer en fonction de x et de y le chiffre d'affaires C correspondant à la vente de tous les sapins.
b) Les couples (x, y) correspondant à un chiffre d'affaires donné C sont les coordonnées des points d'une droite notée D .Préciser une équation de cette droite.
Représenter la droite D_{90000} correspondant au cas particulier où C = 90 000.
c) À l'aide du graphique, déterminer le nombre de sapins de chaque type à commander pour réaliser le chiffre d'affaires maximal, noté Cm; calculer ce chiffre d'affaires Cm . On expliquera la méthode utilisée.

Sujet Bac 96

Exercice 5

Une compagnie maritime de transport inter- îles dispose de 11 bateaux de deux modèles
• 5 du modèle M1 pouvant transporter à pleine charge 400 personnes et 15 véhicules;
• 6 du modèle M2 pouvant transporter à pleine charge 100 personnes et 30 véhicules.
Un organisme désirant acheminer 1 600 personnes et 120 véhicules se propose de déterminer le nombre x de bateaux du modèle M1 et le nombre y de bateaux du modèle M2, pour réaliser ce transport avec le moins de bateaux possibles.

1) Montrer que les deux entiers positifs x et y doivent vérifier les conditions suivantes

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 5 \\ 0 \leqslant y \leqslant 6 \end{cases}$$

$$\text{et} \begin{cases} 4x + y \geqslant 16 \\ x + 2y \geqslant 8. \end{cases}$$

2) a) Le plan est rapporté à un repère orthogonal d'unité graphique 1 cm sur chaque axe, construire les droites **D1** et **D2** d'équations respectives :

$y = -4x + 16$ et $y = -\frac{1}{2}x + 4$

b) Colorier la partie du plan contenant tous les points dont les coordonnées (x, y) vérifient le système des inégalités de 1).

3)Le nombre total de bateaux utilisés est x + y = n. Les couples (x, y) correspondant à un n donné sont les coordonnées entières de points appartenant à une droite **Dn** d'équation y= -x+n.
Déterminer graphiquement les coordonnées (x, y) du point 1 par lequel doit passer la droite **Dn** pour que le nombre de bateaux utilisés soit minimal. Préciser ce nombre.

Sujet Bac

Exercice 6

Le comité des fêtes d'une commune organise un repas pour 150 personnes.
II prévoit pour chaque personne 3 assiettes en carton, 2 verres et *4* serviettes en papier.
Le magasin TOUTENBROC propose un lot de type A comprenant 50 assiettes, 50 verres et 50 serviettes pour 50 F.
Le magasin STRUC propose un lot de type B comprenant 30 assiettes, 25 verres et *60* serviettes pour *40* F.
On se propose de déterminer le nombre x de lots A et le nombre y de lots B pour que l'achat soit le plus économique possible.

1) Déterminer un système d'inéquations portant sur x et y traduisant les contraintes.

2) À tout couple (x, y) on associe le point M de coordonnées (x, y) dans un repère orthonormé (O ; i , j) (unité : 1 cm).
Déterminer graphiquement l'ensemble des points M(x, y) tels que :

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ 5x + 3y \geqslant 45 \\ 2x + y \geqslant 12 \\ 5x + 6y \geqslant 60. \end{cases}$$

(On hachurera la zone ne convenant pas.)

3)
a) Exprimer en fonction de x et y la dépense D occasionnée par l'achat de x lots A et de y lots B.
b) Tracer dans le plan la droite 0 correspondant à une dépense de *680* F.
Déterminer graphiquement les couples (x, y) pour lesquels la dépense est de *680 F.*
c) Expliquer comment le graphique permet de déterminer le nombre X_0 de lots A et le nombre Y_0 de lots B pour lesquels la dépense est minimale. On appellera I le point de coordonnées $(X_0 ; Y_0)$.
Calculer les coordonnées de I ainsi que cette dépense.
Sujet Bac

Exercice 7

L'intendant d'un lycée doit remplacer 300 chaises,
110 tables et 30 bureaux. II s'adresse à deux entreprises qui proposent les lots suivants
• l'entreprise A propose des lots de 18 chaises, de 5 tables et 1 bureau pour un prix de 2 500 F par lot;
• l'entreprise B propose des lots de 12 chaises, de 5 tables et 2 bureaux pour un prix de 3 000 F par lot.
Le but de l'exercice est de déterminer le nombre
de lots que l'intendant doit acheter à chaque entreprise pour réaliser une dépense minimale.
On note x le nombre de lots achetés à l'entreprise
A et y le nombre de lots achetés à l'entreprise B.

1) Traduire les contraintes sous forme d'un système d'inégalités.
2) Le plan est rapporté à un repère orthonormal (O ; i , j) (unité graphique : 0,5 cm).
Résoudre graphiquement le système

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ x + 2y \geqslant 30 \\ x + y \geqslant 22 \\ 3x + 2y \geqslant 50. \end{cases}$$

3)
a) Écrire en fonction de x et de y la dépense D occasionnée par l'achat de x lots à l'entreprise A et de y lots à l'entreprise B.
b) Écrire y en fonction de x et de *D.*

4) a) Tracer la droite D_{75000} correspondant à une dépense *D* = 75 000 F
b) Tracer la droite correspondant à la dépense minimale *Dm.*
c) Déterminer le couple (x, y) correspondant à cette dépense minimale *Dm* .
d) Calculer *Dm*

Exercice 8

Le gérant d'un hôtel souhaite renouveler le linge de toilette de son établissement. Il a besoin de 90 draps de bain, 240 serviettes et 240 gants de toilette.

Une première entreprise de vente lui propose un lot A comprenant 2 draps de bain, 4 serviettes et 8 gants de toilette pour 200 F.

Une deuxième entreprise vend pour 400 F un lot B de 3 draps de bain, 12 serviettes et 6 gants de toilette.

Pour répondre à ses besoins, le gérant achète x lots A et y lots B.

1. Traduire par un système d'inéquations les contraintes auxquelles satisfont x et y.

2. On considère un plan P rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. A tout couple (x, y) on associe le point M de P de coordonnées x et y, en convenant que 2 cm représentent 5 lots sur chaque axe, soit 4 mm par lot.

Représenter dans P l'ensemble G des points M (x , y) satisfaisant aux inéquations :

$$\begin{cases} x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 \\ 2x + 3y \geq 90 \\ x + 3y \geq 60 \\ 4x + 3y \geq 120 \end{cases}$$

On hachurera la partie du plan formée des points pour lesquels les contraintes ne sont pas vérifiées.

3.
a) Exprimer en fonction de x et de y la dépense en francs occasionnée par l'achat de x lots A et y lots B.
b) Est-il possible de procéder aux achats nécessaires avec 5 000 F ? On justifiera la réponse.
4. Déterminer graphiquement, en précisant la démarche choisie, les nombres de lots A et B à acheter pour avoir une dépense minimale. Quelle est cette dépense minimale ?


Exercice corrigé
Que j'aime ces mots !!!

Exercice Type et son corrigé.

Le responsable d'une cantine scolaire doit acheter au minimum 70 assiettes plates et 40 assiettes creuses.
Deux grossistes proposent :

- l'un, le lot A de 10 assiettes plates et 10 assiettes creuses pour 100 F
- l'autre, le lot B de 20 assiettes plates et 10 assiettes creuses pour 125 F.

On se propose dans les questions suivantes de déterminer le nombre x de lots A et le nombre y de lots B que le responsable doit acheter pour que la dépense soit minimale.

1. Traduire les contraintes sous la forme d'un système d'inéquations.
2. Le plan est rapporté à un repère orthonormé (unités graphiques : 2 cm).
   Déterminer graphiquement l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées (*x ;y*) vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 2y \geq 7 \\ x + y \geq 4 \end{cases}$$

(Hachurer la partie du plan qui ne convient pas)

3. En utilisant le graphique, expliquer pourquoi, pour couvrir les besoins de la cantine, le responsable de la cantine peut ou ne peut pas acheter :

a. Deux lots A et deux lots B.
b. Trois lots A et deux lots B.
c. Six lots A et un lot B.

4. a. Exprimer en fonction de x et y la dépense C occasionnée par l'achat de x lots A et y

Corrigé

1)
Tableau des contraintes :

	Nombre	Assiettes plates	Assiettes creuses
Lot A (x)	x	10	10
Lot B (y)	y	20	10
Contraintes	**à minimiser**	≥ 70	≥ 40

Le tableau de contraintes précédent donne le système suivant :

$$\begin{cases} x \geq 0 \text{ et entier.} \\ y \geq 0 \text{ et entier.} \\ 10x+20y \geq 70 \text{ d'après les contraintes sur les assiettes plates.} \\ 10x+10y \geq 40 \text{ d'après les contraintes sur les assiettes creuses.} \end{cases}$$

après simplification je trouve :

$$\begin{cases} x \geq 0 \text{ et entier.} \\ y \geq 0 \text{ et entier.} \\ x+2y \geq 7 \text{ (simplification par 10)} \\ x+y \geq 4 \text{ (simplification par 10)} \end{cases}$$

2)

Soit D_1 : x = 0

D_2 : x = 0

D_3 : Y= $-\frac{1}{2}x+3.5$

D_4 : Y= $-x+4$

les droites frontières du domaine à représenter.

Pour D_3

x	0	2
y	3.5	2.5

Pour D_4

x	0	4
y	4	0

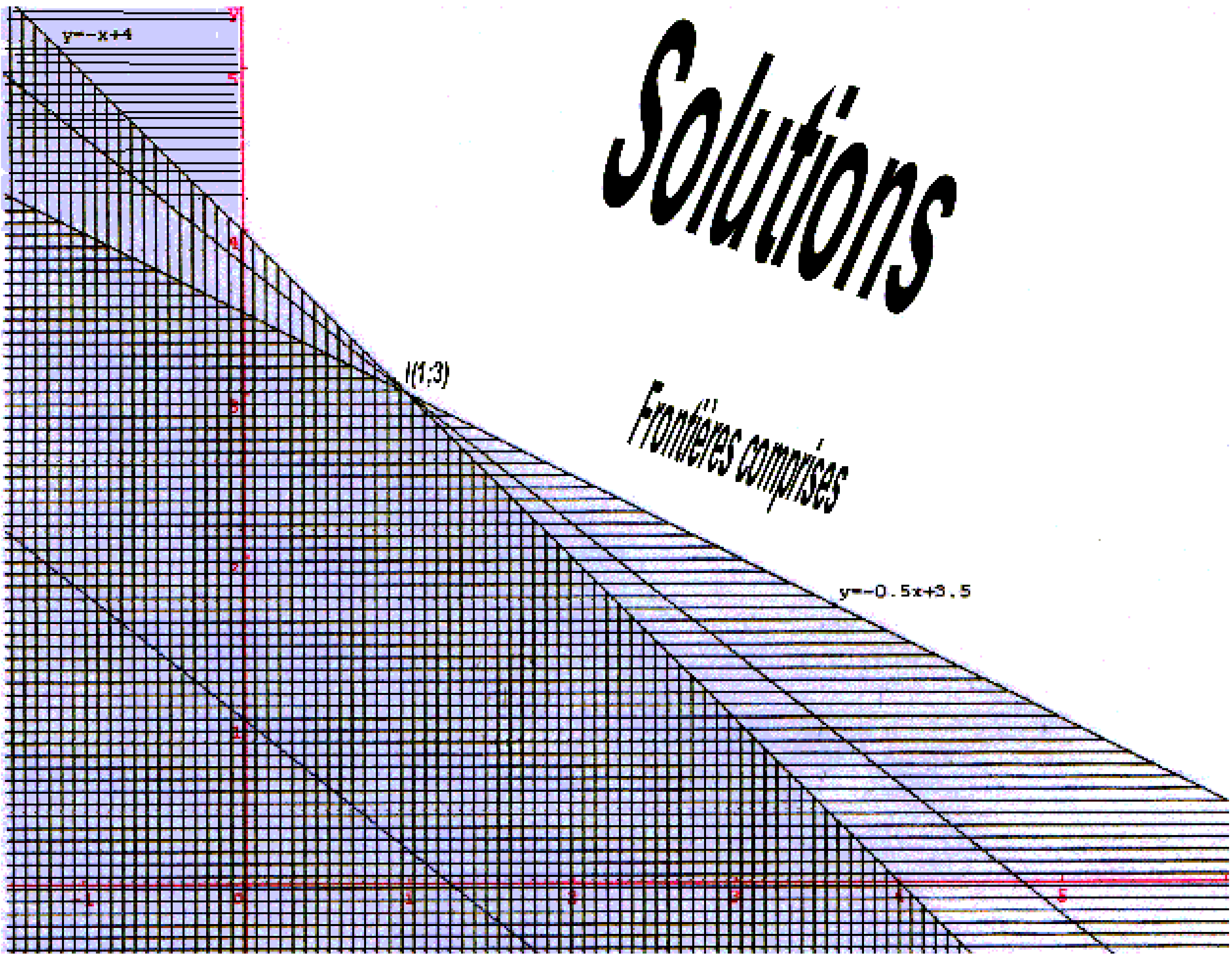
Hachurons la partie non solution.
Méthode :

- $x \geq 0$ L'ensemble des points M(x ;y) tels que $x \geq 0$ est le demi plan de frontière D_1 situé à droite de D_1 .On hachurera la partie située à gauche de D_1 .

- $y \geq 0$ L'ensemble des points M(x ;y) tels que $y \geq 0$ est le demi plan de frontière D_2 situé au dessus de D_2 .On hachurera la partie située au dessus de D_2 .

- x+2y ≥ 7
  vérifions si le point O(0 ;0) satisfait cette inéquation.
  $0+2\times 0=0$ or $0 \leq 70$. Donc O(0 ;0) ne satisfait pas l' inéquation. n hachure le ½ plan de frontière D_3 et ne contenant pas O.

- x+y ≥ 4
  vérifions si le point O(0 ;0) satisfait cette inéquation.
  $0+0=0$ or $0 \leq 40$. Donc O(0 ;0) ne satisfait pas l' inéquation. n hachure le ½ plan de frontière D_4 et ne contenant pas O.



3)

a) Pour pouvoir acheter 2 lots A et 2 lots B, il faut que le point de coordonnées (2 ;2) se trouve dans la solution du système de la question 2.

Ce n'est pas le cas donc on ne peut pas acheter 2 lots A et 2 lots B.

b) Pour pouvoir acheter 3 lots A et 2 lots B, il faut que le point de coordonnées (3 ;2) se trouve dans la solution du système de la question 2.

C'est pas le cas donc on peut pas acheter 3 lots A et 2 lots B.

c) Pour pouvoir acheter 6 lots A et 1 lot B, il faut que le point de coordonnées (6 ;1) se trouve dans la solution du système de la question 2.

C'est pas le cas donc on peut pas acheter 6 lots A et 1 lots B.

4)

a) Soit D la dépense, on a :
D = 100*x* + 125*y*

b) Si D = 125 ,on trace la droite d'équation 100x + 125y = 125 c'est à dire $y = -\frac{4}{5}x + 1$

Pour la tracer on prend 2 points de la droite.

si *x* = 0, alors *y* = 1
si *x* = 4, alors *y* = 0

Pour D :

x	0	1
y	4	0

Voir sur la courbe ci dessus.

c) Parmi toutes les droites de dépense d'équations $y = -\frac{4}{5}x + \frac{D}{125}$,

toutes parallèles entres elles car elles ont le même coefficient directeur $-\frac{4}{5}$,

une seule correspond à une dépense minimale.

C'est c'elle :
- qui conserve au moins un point de coordonnées entières en commun avec le domaine.
- dont l'ordonnée à l'origine $\frac{D}{125}$ est la plus petite possible.

Le point recherché a pour coordonnées (1 ; 3), point d'intersection des droites D_3 et D_4 .

d) Il faudra donc acheter 1 lot A et 3 lots B pour couvrir les besoins de la cantine en dépensant le moins possible.

e) La dépense minimale est de : $1 \times 100 + 3 \times 125 = 475$

Soit une dépense de 475 Francs.